反強磁性Ising Modelの相転移とLee-Yang函数の性質

浅野, 太郎

反強磁性 Ising Model の相転移と Lee − Yang 函数の性質

東大教養学部・図学教室　　浅 野 太 郎

（９月１日受理）

§１ 序　　論

強磁性 Ising Model に関してはその相転移は詳細にわたり厳密に調べられている。例えば（ⅰ）転移は外部磁場が零の時に限って可能。[1]（ⅱ）磁化は温度の減少函数であり，[2] 二次元以上の系では温度が充分に低ければ自発磁化が存在する。[2) 3) 5)]（ⅲ）真の Curie 点は常に Weiss 近似の Curie 点より低い。[2) 4)] 等の事が厳密に証明されている。しかし，反強磁性 Ising Model の場合は事情は強磁性の場合ほど明きらかではない。相転移に関しての強力な武器である Lee − Yang の定理も[1) 6) 7) 8)] Griffiths 不等式[2] も全てその成立は ferromagnetic な場合に限られている。それ故これら諸定理が反強磁性の場合，何の様になるかには興味がある。我々は Yang[9] がかって Heisenberg model の基底状態を論ずる際に用いた等価関係を利用する。この関係から一群の反強磁性 Ising model は強磁性の場合に等価である事が示され諸定理の反強磁性の場合の形が容易に求められる。任意スピンの強磁性 Ising model は Lee−Yang の lemma に従う事は良くしられているが[1) 6) 7) 8)] この lemma に従う函数はいくつかの特色を具えている。§４でこの性質は列挙しておく。

§２ 基　本　式

系は二つの Sublattice　A と B からなるとし，異る Sublattice の Spin 間には反強磁性的結合があり，同一 Sublattice の Spin 間には強磁性的結合があるとする。例えば，S.C. lattice で，nearest neighbor 間には反強磁性的結合があり，第二近接 Spin 間には強磁性的結合がある場合などは，今考えている模型に含まれている。ハミルトニアンは次の様に書ける。

$$H = -\Sigma J_{aa'} S_a S_{a'} - \Sigma J_{bb'} S_b S_{b'}$$
$$- \Sigma J_{ab} S_a S_b + \Sigma h'_a S_a - \Sigma h_b S_b, \qquad (2.1)$$

ここで

$$J_{aa'} \geq 0 \quad J_{bb'} \geq 0 \quad J_{ab} \leq 0 \qquad (2.2)$$

とし，h'_a，h_b は a一点 b一点にかかる外場（符号は，A一格子点に関するものは負になっている。）なお，全文を通じ，a a′ 等はA格子点を表わし，b，b′ 等はB格子点を表わす。i，j，k，ℓ 等の文字は，A，B 両格子点を意味する。S_i は Spin の Z一成分で $\pm\frac{1}{2}$ なる価をとる。Yang，Yang[9] に習って次の Operator を考える。

$$C = \prod_{a \in A} \sigma_a^x \qquad (2.3)$$

σ^x はPauli operator である。明きらかに，

$$\begin{cases} C^2 = 1 \\ C^{-1} S_a C = -S_a \\ C^{-1} S_b C = S_b \end{cases} \qquad (2.4)$$

これから，

$$\begin{cases} C^{-1} H C = H_0 \\ H_0 = -\Sigma J_{aa'} S_a S_{a'} - \Sigma J_{bb'} S_b S_{b'} + \Sigma J_{ab} S_a S_b \\ \qquad - \Sigma h_a' S_a - \Sigma h_b S_b \end{cases} \qquad (2.5)$$

H_0 は不均一磁場のある強磁性 Ising model のハミルトニアンである。二種類の平均 $\langle X \rangle$，$\langle X \rangle_0$ を定義しておく。

$$\begin{cases} \langle X \rangle = Z^{-1} \, \mathrm{Tr} \left[\exp(-\beta H) X \right] \\ \langle X \rangle_0 = Z_0^{-1} \, \mathrm{Tr} \left[\exp(-\beta H_0) X \right] \end{cases} \qquad (2.6)$$

$$\begin{cases} Z = \mathrm{Tr}\,\exp(-\beta H) \\ Z_0 = \mathrm{Tr}\,\exp(-\beta H_0) \end{cases} \tag{2.7}$$

(2.4),(2.5) から，

$$Z = Z_0 \tag{2.8}$$

$$\langle S_a \cdots S_{a'}\, S_b \cdots S_{b'} \rangle = \langle (-S_a) \cdots (-S_{a'})\, S_b \cdots S_{b'} \rangle \tag{2.9}$$

§ 3 Griffiths' inequalities

強磁性 Ising model に於ける Griffith 不等式は次の様である。

(i) $\langle S_i \rangle_0 \geq 0$ (3.1)

(ii) $\langle S_i S_j \rangle_0 \geq 0$ (3.2)

(iii) $$\beta^{-1} \frac{\partial}{\partial J_{k\ell}} \langle S_i \rangle_0 = \langle S_i S_k S_\ell \rangle_0 - \langle S_i \rangle_0 \langle S_k S_\ell \rangle_0 \geq 0 \tag{3.3}$$

$$\beta^{-1} \frac{\partial}{\partial J_{k\ell}} \langle S_i S_j S_k S_\ell \rangle_0 = \langle S_i S_j S_k S_\ell \rangle_0 - \langle S_i S_j \rangle_0 \langle S_k S_\ell \rangle_0 \geq 0 \tag{3.4}$$

(iv) $\langle S_i S_j \rangle_0 \leq \sum_{k \neq i} \langle S_k S_j \rangle_0 \,\mathrm{th}\, \beta J_{ik}$ (3.5)

$\langle\ \rangle_0$ は強磁性 Ising model に関する熱平均，(i) ～ (iii) は非負の不均一磁場がある時，(iv) は外場がない時の平均である。これらに応じて，考えている反強磁性系では，

(i′) $\langle S_a \rangle \leq 0$ ， $\langle S_b \rangle \geq 0$ (3.6)

(ii′) $\langle S_a S_b \rangle \leq 0$

$$\begin{cases} \langle S_a\ S_{a'}\rangle \geq 0 \\ \langle S_b\ S_{b'}\rangle \geq 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

(iii′)
$$\begin{cases} \beta^{-1}\dfrac{\partial}{\partial J_{ab}}\langle S_{a'}\rangle = \langle S_{a'}\ S_a\ S_b\rangle - \langle S_{a'}\rangle\ \langle S_a\ S_b\rangle \\ \qquad \geq 0 \\ \beta^{-1}\dfrac{\partial}{\partial J_{aa'}}\langle S_{a''}\rangle = \langle S_{a''}\ S_{a'}\ S_a\rangle - \langle S_{a''}\rangle\langle S_{a'}\ S_a\rangle \\ \qquad \leq 0 \\ \beta^{-1}\dfrac{\partial}{\partial J_{aa'}}\langle S_b\rangle = \langle S_a\ S_{a'}\ S_b\rangle - \langle S_a\ S_{a'}\rangle\ \langle S_b\rangle \\ \qquad \geq 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

$$\begin{cases} \beta^{-1}\dfrac{\partial}{\partial J_{aa'}}\langle S_{a''}\ S_{a'''}\rangle = \langle S_a\ S_{a'}\ S_{a''}\ S_{a'''}\rangle \\ \qquad - \langle S_a\ S_{a'}\rangle\langle S_{a''}\ S_{a'''}\rangle \geq 0 \\ \beta^{-1}\dfrac{\partial}{\partial J_{ab}}\langle S_{a'}\ S_{a''}\rangle = \langle S_a\ S_{a'} S_{a''} S_b\rangle \\ \qquad - \langle S_{a'}\ S_{a''}\rangle\ \langle S_a\ S_b\rangle \leq 0 \\ \beta^{-1}\dfrac{\partial}{\partial J_{bb'}}\langle S_a\ S_{a'}\rangle = \langle S_a\ S_{a'}\ S_b\ S_{b'}\rangle \\ \qquad - \langle S_a\ S_{a'}\rangle\ \langle S_b\ S_{b'}\rangle \geq 0 \\ \beta^{-1}\dfrac{\partial}{\partial J_{bb'}}\langle S_a\ S_{b''}\rangle = \langle S_a\ S_{b''} S_{b'}\ S_b\rangle \\ \qquad - \langle S_a\ S_{b''}\rangle\ \langle S_b S_{b'}\rangle \leq 0 \\ \beta^{-1}\dfrac{\partial}{\partial J_{ab}}\langle S_{a'}\ S_{b'}\rangle = \langle S_a\ S_b\ S_{a'}\ S_{b'}\rangle \\ \qquad - \langle S_a\ S_b\rangle\ \langle S_{a'}\ S_{b'}\rangle \geq 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

(iv′)
$$\begin{cases} \langle S_a\ S_b\rangle + \sum\limits_{k \neq a}\langle S_k S_b\rangle\ \mathrm{th}\ \beta\ J_{ak} \geq 0 \\ \langle S_a\ S_{a'}\rangle - \sum\limits_{k \neq a}\langle S_k\ S_{a'}\rangle\ \mathrm{th}\ \beta\ J_{ak} \leq 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

(i′)～(iii′)迄は，$h_a' \geq 0$，$h_b \geq 0$，(iv′)

は $h_a' = h_b = 0$ の時の平均である。

これらは，(i)～(iv)に(2.9)を用いて導ける。これらの不等式から強磁性 Ising model に関して Griffiths が得た結果を導く事はたやすい。

(T1) 上記の反強磁性 Ising model S_0 の部分系 S に "L. R. O." (long range order) が現われるなら S_0 にも L. R. O. が存在する。部分系とは元の系 S_0 のいくつかの Spin 間相互作用を除いた系の事で，一，二次元系は S_0 の部分系である。

実際，(3.7)(3.9)より $|\langle S_i S_j \rangle|$ は任意の $|J_{\ell m}|$ の増加函数である事がわかる。これは，i, j, ℓ, m が A に属しようが，B に属しようが変らない。従って全ての $|\langle S_i S_j \rangle|$ は S_0 に於ける値の方が S に於ける値より常に大きい。即ち S に L. R. O. があれば S_0 にも存在する。

(T2) 部分格子A又はBの磁化は温度の減少函数である。

Griffiths のやり方をそのままに用いて云えば次の様になる。温度を上げる事は全ての $|J_{ij}|$ を減少させると同じ効果がある。(3.6)(3.8)から，$|\langle S_i \rangle|$ は $|J_{k\ell}|$ の増加函数となるから，温度の減少函数である。

(T3) 二，三次元系では低温で部分格子自発磁化が存在する。

A，B 格子のスピン当りの平均磁化を次の様に定義する。

$$\begin{cases} M_A = N_A^{-1} \Sigma \langle S_a \rangle \\ M_B = N_B^{-1} \Sigma \langle S_b \rangle \end{cases} \tag{3.11}$$

又，対応する強磁性 Ising model (2.5) のスピン当りの平均磁化は，

$$M_0 = N^{-1} \Sigma \langle S_i \rangle_0 \tag{3.12}$$

N_A, N_B は，A，B 格子の格子点の数，

$N = N_A + N_B$ である。(2.9)より

$$M_0 = -N_A N^{-1} M_A + N_B N^{-1} M_B \qquad (3.13)$$

強磁性 Ising model では低温で自発磁化が存在する事はよくしられている。[2),5)] よって，少くとも A，B のうち一方は自発磁化がある。

(iV′) は，Weiss 近似の Curie 点は真の値より必ず高い事を示すのに使われる。[2)] この場合は次の様に云える。

(T4) 最近接交換相互作用は $-J\ (J \geq 0)$ 第二近接 Spin 間相互作用 $K\ (K \geq 0)$ の S.C. Ising model では，

$$1 - y \ \mathrm{th}\ \beta K \geq z \ \mathrm{th}\ \beta J \qquad (3.14)$$

を充す温度域には自発磁化は存在しない。$K = 0$ ならこれは単に，

$$1 \geq z \ \mathrm{th}\ \beta J \qquad (3.15)$$

を与え，Weiss 近似の Curie 点以上では自発磁化は存在しない事になる。z，y は最近接第二最近接格子点の数である。Weiss 近似の Curie 点 $T_W = zJ$ 以上では，(3.15) が充される。

Griffiths に習って，[2)] 常に $+\frac{1}{2}$ の値をとる "Ghost Spin" を B－lattice に入れる。均一磁場 $\frac{1}{2} h_B$ が B－lattice にかかっている系は，この "Ghost Spin" s_0 を導入する事により磁場がない場合に書き直される。即ち新しく，

$$J_{b0} = h_B \geq 0, \qquad J_{a0} = 0 \qquad (3.16)$$

という相互作用を入れればよい。この Spin s_0 が常に $\frac{1}{2}$ なる値をとるという制限付きの平均を $\langle\ \ \rangle'$ で表わす。$\langle\ \ \rangle'$ は通常の制限なしの平均 $\langle\ \ \rangle$ で次の様にかける。

$$\langle S_k \rangle' = 2 \langle S_k S_0 \rangle \qquad (3.17)$$

これより部分格子の磁化は，

$$\begin{cases} M_A = N_A^{-1} \Sigma\, 2 \ \langle S_a S_0 \rangle \\ M_B = N_B^{-1} \Sigma\, 2 \ \langle S_b S_0 \rangle \end{cases} \tag{3.18}$$

（3.10）を用いて，

$$|M_A| \leq - N_A^{-1} \sum_{a \neq a'} \Sigma\, 2 \langle S_{a'} S_0 \rangle \ \mathrm{th}\, \beta J_{a a'}$$

$$- N_A^{-1} \sum_{b' \neq 0} \Sigma\, 2 \langle S_{b'} S_0 \rangle \ \mathrm{th}\, \beta J_{a b'}$$

$$M_B \leq N_B^{-1} \sum_{\substack{b \neq b' \\ b' \neq 0}} \Sigma\, 2 \langle S_{b'} S_0 \rangle \ \mathrm{th}\, \beta J_{b b'}$$

$$+ N_B^{-1} \Sigma \Sigma\, 2 \langle S_{a'} S_0 \rangle \ \mathrm{th}\, \beta J_{b a'}$$

$$+ \frac{1}{2} \ \mathrm{th}\, \beta h_B \tag{3.19}$$

今考えている系では，

$$J_{ij} = - J \quad (i, j: \text{ nearest neighbors})$$

$$= K \quad (i, j: \text{ next nearest neighbors})$$

だから，

$$|M_A| \ (1 - y \ \mathrm{th}\, \beta K) \leq N_A^{-1} N_B M_B \ z \ \mathrm{th}\, \beta J$$

$$M_B \ (1 - y \ \mathrm{th}\, \beta K) \leq N_A N_B^{-1} |M_A| \ z \ \mathrm{th}\, \beta J$$

$$+ \frac{1}{2} \ \mathrm{th}\, \beta h_B \tag{3.21}$$

これより

$1 - y \ \mathrm{th}\, \beta K \geq 0$　なら

$$M_B \leq \frac{1}{2} (1 - y \ \mathrm{th}\, \beta K) \ \mathrm{th}\, \beta h_B \left[(1 - y \ \mathrm{th}\, \beta K)^2 \right.$$

$$\left. - z^2 (\mathrm{th}\, \beta J)^2 \right]^{-1} \tag{3.22}$$

自発磁化は，

$$\widetilde{M}_B = \lim_{h_B \to 0} \lim_{N_B \to \infty} M_B \tag{3.23}$$

で定義される。従って

$$1 - y \ \mathrm{th}\ \beta K \geq z \ \mathrm{th}\ \beta J \tag{3.24}$$

を充すかぎり自発磁化は存在しない。

§4 Lee－Yang の定理と Lee－Yang 函数

強磁性 Ising model の分配函数は " fugacity " の函数として，その零点が全て単位円に限られるという Lee－Yang の定理を充す。[1)6)7)8)]

この定理は相転移が磁場零の時にしか起らぬ事を保証している。等価性から我々の系に於ける " Lee－Yang の定理 " は次の形に書ける。

(T5)　(2.1) で与えられる反強磁性 Ising model の状態和

$$\mathrm{Tr}\ \exp(-\beta H)\, Z^{(\Sigma S_b - \Sigma S_a)} \tag{4.1}$$

は $Z = \exp(\beta h)$ の函数として，その零点は単位円にかぎられる。（但し，(2.1) で $h_a' = h_b = 0$）

これは，次の " Lee－Yang の lemma " の直接の結果である。

(T6)　$F(Z_1 \cdots Z_{N_A}\ y_{1'} \cdots y_{N_B'})$

$$= \mathrm{Tr}\left[\exp(-\beta H)\, Z_1^{-S_1} \cdots Z_{N_A}^{-S_{N_A}}\ y_{1'}^{S_{1'}} \cdots y_{N_B'}^{S_{N_B'}}\right] \tag{4.2}$$

は次の性質をもつ。もし，

$$\begin{cases} |Z_i| \geq 1 & i = 1,\ 2,\ \cdots,\ N_A \\ |y_i| \geq 1 & i = 1',\ 2',\ \cdots,\ N_B' \end{cases} \tag{4.3}$$

$$F(Z_1 \cdots Z_{N_A}\ y_{1'} \cdots y_{N_B'}) = 0 \tag{4.4}$$

なら，

$$|Z_i| = |y_i| = 1 \qquad (i = 1, \cdots, N_A,\ 1', \cdots, N_B') \tag{4.5}$$

ここに 1 … N_A はA格子に，1′ …N_B' はB格子に属するものとする。

実際（T6）は単に，強磁性 Ising model に於いては，

$$\mathrm{Tr}\ \exp\ (-\beta H_0)\ Z_1^{S_1} \cdots Z_N^{S_N} \tag{4.6}$$

が Lee－Yang の lemma に従う事，即ち (4.3),(4.4),(4.5) を充す事を意味するに過ぎない。

n変数 $Z_1, \cdots, Z_n$ の函数でこの Lee－Yang の lemma を充す函数は色々の特色をもっている。主要なものをあげてみよう。

（D1） $f(Z_1 \cdots Z_n)$ は次の性質を充す時S次の Lee－Yang 函数と云い $f \in Le_n^{(s)}$ と書く。S は $\frac{1}{2}$，1，$\frac{3}{2}$ ……… の値をとる。

(A) $Z_1^S \cdots Z_n^S\ f$ は各 Z_i の 2S次多項式で，$Z_1^{2S} \cdots Z_n^{2S}$ の係数は零でない。

(B) f は Lee－Yang の lemma は従う。即ち，

$$|Z_i| \geq 1 \qquad (i = 1, \cdots n) \tag{4.7}$$

$$f(Z_1 \cdots Z_n) = 0 \tag{4.8}$$

なら，

$$|Z_i| = 1 \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{4.9}$$

f は次の性質を充す。

（T7） $f \in Le_n^{(s)}$ なら，任意のm変数 $Z_1 \cdots Z_m$ をとった時，fの $Z_1^S Z_2^S \cdots Z_m^S$ （$m \leq n$）の係数はやはりS次の Lee－Yang 函数である。

これを示すには次のやや self evident な定理を証明しておけば十分である。

（T7′） $f \in Le_n^{(s)}$ とし，

$$f = \sum_{\sigma=-s}^{s} g_\sigma Z_n^\sigma \qquad (4.10)$$

とする。この時，

$$g_s \in Le_{n-1}^{(s)} \qquad (4.11)$$

仮に $\{Z\}$ の組 $\{Z_i^0\}$ があって，

$$g_s(Z_1^0, \cdots, Z_{n-1}^0) = 0 \qquad (4.12)$$

$$|Z_1^0| \geqq 1, \cdots, |Z_{n-1}^0| \geqq 1 \qquad (4.13)$$

を充したとする。Appendix に示す様に，次の様な値の組 $\{Z_i'\}$ が存在する。

$$g_s(Z_1', \cdots, Z_{n-1}') \neq 0 \qquad (4.14)$$

$$|Z_i'| \geqq 1 \qquad (i = 1, \cdots, n-1) \qquad (4.15)$$

$$0 \leqq |Z_i' - Z_i^0| < \varepsilon \qquad (i = 1, \cdots, n-1) \qquad (4.16)$$

ε は任意の正数である。従って次の様な連続な道 $\{Z_i(t)\}$ （$1 \geqq t \geqq 0$；$i = 1, \cdots, n-1$）が存在する。

$$Z_i(0) = Z_i^0 \qquad (4.17)$$

$$g_s(\{Z_i(t)\}) \neq 0 \qquad 1 \geqq t > 0 \qquad (4.18)$$

$$\lim_{t \to 0} g_s(\{Z_i(t)\}) = 0 \qquad (4.19)$$

更に，$f \in Le_n^{(s)}$ である為には（B）より，少くとも一つは零でない $g_\sigma(Z_1^0, \cdots, Z_{n-1}^0)$ がなければならぬ。よって

$$\lim_{t \to 0} g_\sigma(\{Z_i(t)\}) / g_s(\{Z_i(t)\}) = \infty \qquad (4.20)$$

ここで，

$$f(Z_1(t), \cdots, Z_{n-1}(t), Z_n) = 0 \qquad (4.21)$$

を充す Z_n を t の函数と考えると，g_σ / g_s は，（4.12）の根の有限ヶの積の

和だから，$\mathcal{G}_\sigma/\mathcal{G}_S\to\infty$である為には少くとも一根は $t\to 0$ で無限大になる。従って，tが十分小さければ，その絶体値を1より大に出来る。即ち次の変数の組が存在し，

$$\begin{cases} |Z_i'| \geqq 1 \quad (i=1,\cdots,n-1) & (4.22) \\ |Z_n'| > 1 & (4.23) \end{cases}$$

で，
$$f(Z_1',\cdots,Z_n')=0 \tag{4.24}$$

となり，矛盾が導かれる。

（T7）は，与えられた函数が Lee－Yang 函数か否かを check するに有用である。

（T8） $f\in Le_n^{(S)}$ なら全ての $|Z_i|$ が1より大きい場合は，$|f|$ は各 $|Z_i|$ の単調増加函数である。

（T9） fが次の性質を充すとする。

$$f\in Le_n^{(S)} \quad \left(S=\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2}\right) \tag{4.25}$$

$$f(Z_1^{-1},\cdots,Z_n^{-1})=f(Z_1,\cdots,Z_n) \tag{4.26}$$

$$f(Z_1^{*},\cdots,Z_n^{*})=f^{*}(Z_1,\cdots,Z_n) \tag{4.27}$$

この時

$$f(Z_1',Z_2'\cdots Z_n')=0 \tag{4.28}$$

$$|Z_2'|=\cdots=|Z_n'|=1 \tag{4.29}$$

なら，
$$|Z_1'|=1 \tag{4.30}$$

（T8），（T9）は前報で証明してある。[6)]

（T9）が $S>\frac{3}{2}$ で成立するか否かは未だわからない。

(Appendix)

(4.14), (4.15), (4.16) を充す $\{Z_i'\}$ の組がある事を示す。数学的帰納法による。

$n=1$ の時，$\mathcal{g}_S(Z_1)$ は (A) により恒等的に零ではないのだから，高々 2Sケの Z_1 の値で零になるだけである。そこで，この零点をさえさけてやれば，(4.14), (4.15) を充す Z_i' は (4.16) を充すから，求める Z の組が存在する事になる。

$n=m-1$ の時を仮定して，m の時も成立する事を示す。$\mathcal{g}_S$ を次の形に書いておく。

$$\mathcal{g}_S = \sum_{\sigma=-S}^{S} \mathcal{g}_\sigma' (Z_1, \cdots, Z_{m-1}) Z_m^\sigma$$

$\mathcal{g}_S'(Z_1^0, \cdots, Z_{m-1}^0)$ が零ではないとすれば，$\mathcal{g}_S$ は Z_m の函数として高々 2Sケの零点をもつ丈だから前の議論をくり返せば，定理の成立が示される。一方 $\mathcal{g}_S'(Z_1^0 \cdots Z_{m-1}^0)$ が零なら，$\mathcal{g}_S'$ は $m-1$ 変数の函数だから，帰納法の仮定により (4.14) ~ (4.16) を充す $\{Z_i'\}$ の組が存在して $\mathcal{g}_S' \neq 0$ に出来る。従って再び前の議論がくり返せる事になるので定理は証明された。

文　献

1) T. D. Lee and C. N. Yang: Phys. Rev. 87 (1952) 404, 410

2) R. B. Griffiths: J. Math. Phys. 8 (1967) 478, 484
Commun. Math. Phys. 6 (1967) 121.
D. G. Kelly and S. Sherman: J. Math. Phys. 9 (1968) 466.

3) R. Peierls: Proc. Cambridge Phil. Soc. 32 (1936) 477.
R. B. Griffiths: Phys. Rev. 136 (1964) A437.

4) M. E. Fisher: Phys. Rev. 162 (1967) 480.

5) J. Ginibre, A. Grossman and D. Ruelle: Commun. Math. Phys. 3 (1966) 187.

6) T. Asano: Prog. Theor. Phys. 40 (1968) 1328.
J. Phys. Soc. Japan. 25 (1968) 1220.

7) M. Suzuki: J. Math. Phys. **9** (1969) 2064.
Prog. Theor. Phys. **40** (1968) 1246,
41 (1969) 1438.
8) R. B. Griffiths: to be published in J. Math. Phys.
9) C. N. Yang and C. P. Yang; Phys. Rev. **147** (1966) 303.

反強磁性Ising模型とLee－Yang函数の性質(Ⅱ)

東大教養・図学教室　浅野太郎

(9月10日受理)

§1 序論

Ising model に関して有効な諸定理[1) 2) 3) 4) 5) 6) 7) 8)]は多く強磁性の場合に限られ，Spin 間相互作用が反強磁性結合を含む時には成立が保証されない。例えば，Griffiths 不等式については反例が示されている。[2)] 一般に，任意の反強磁性体に関して成立する定理が存在しないだろう事はむしろ当然である。三ケの Spin からなる系を考えよう。第一と第二の Spin が反強磁性的結合をしていれば，この二つは反平衡になりたがる。しかし，もし全ての相互作用が反強磁性的であるとしたら第三の Spin は何ちらを向いたら良いのだろうか。それは Spin 間相互作用の相対的な大きさによって定る事になろう。これは反強磁性の場合は，問題が本質的に多体問題だという事を示している。一方，Lee－Yang の定理[1)]や Griffiths の不等式[2)]の証明の要点は，問題を事実上二体問題に直してしまう事にある。

反強磁性の場合も適当な条件をつけて，この多体問題の困難を除けるなら厳密な定理が得られる。実際，最近接相互作用の場合には単純立方格子ならこの困難がない。そしてこの場合は，Yang[9)]の変換で強磁性の場合に直せるのだった。[9)] 以下この Series で，我々はより複雑な場合を考えていく事になろう。こ